Applications multilinéaires

30 novembre 2020

1. Applications multilinéaires
2. Forme bilinéaire
3. Matrice d'une forme bilinéaire
4. Signature d'une forme quadratique réelle

1 Applications multilinéaires.

Dans tout ce chapitre le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

1.1. Applications multilinéaires.

Définition 1.1

Soient $E_1, ..., E_n$ et F des espaces vectoriels sur K.
Une application $f : E_1 \times .... \times E_n \to F$ est dite multilinéaire (ou n-linéaire) si :
Pour tout $j \in \{1...n\}$ et pour tout $x_1, ...x_{j-1}, x_{j+1}, ...x_n$, l'application de E_j vers F défini par
$y \longrightarrow f(x_1, ...x_{j-1}, y, x_{j+1}, ...x_n)$ est linéaire.

($*$) Si $E_1 = ... = E_n = E$, on dit que f est une application n-linéaire sur E.
($*$) Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme n-linéaire.
($*$) On note $\mathfrak{L}_n(E, F)$ l'ensemble des applications n-linéaires de E dans F.
($*$) On note $\mathfrak{L}_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires sur E. c-à-d $\mathfrak{L}_n(E, \mathbb{K}) = \mathfrak{L}_n(E)$.
Remarque : si $n = 1$, on retrouve $\mathfrak{L}(E, \mathbb{K}) = \mathfrak{L}(E)$.

Définition 1.2 (Symétrie- antisymétrie)

Une application $f \in \mathfrak{L}_n(E, F)$ est dite :

1. symétrique si l'échange de deux vecteurs ne modifie pas l'image (le résultat),
   c-à-d $f(x_1, ...x_j, ..., x_i, ...x_n) = f(x_1, ...x_i, ..., x_j, ...x_n)$ pour tout $i, j = 1....n$.
2. antisymétrique si l'échange de deux vecteurs a pour effet de changer le résultat obtenu en son opposé,
   c-à-d $f(x_1, ...x_j, ..., x_i, ...x_n) = -f(x_1, ...x_i, ..., x_j, ...x_n)$ pour tout $i, j = 1....n$.
3. alternée si $i \neq j$ et $x_i = x_j$ on a $f(x_1, ...x_j, ..., x_i, ...x_n) = 0$.

Notation

1. $S_n(E,F)$ = l'ensemble des applications n-linéaires symétriques de E dans F.
2. $A_n(E,F)$ = l'ensemble des applications n-linéaires alternées de E dans F.
3. $S_n(E)$ (resp. $A_n(E)$) = l'ensemble des formes n-linéaires symétriques (resp. alternées) sur E.

Remarque 1.3

Si $n > 2$, il ne faut pas confondre entre :
$\mathfrak{L}(E_1, ..., E_n, F)$: l'ensemble des applications multilinéaires ;
$\mathfrak{L}(E_1 \times .... \times E_n, F)$: l'ensemble des applications linéaires de $E_1 \times .... \times E_n$ dans F.

Exemple :
$\psi : \quad E \times E \longrightarrow E$ telle que $\psi(x, y) = x$, est une application linéaire mais pas bilinéaire.

proposition 1.4

Soit f une application n-linéaire.
f est alternée $\iff$ f est antisymétrique.

Preuve :

2. Forme bilinéaire

2.1. Forme bilinéaire.

Définition 2.1

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel.
Une forme bilinéaire sur E est une application $\phi : \quad E \times E \to \mathbb{K}$ telle que :

1. ϕ est linéiare à gauche :
   $\phi(x, \alpha y_1 + y_2) = \alpha\phi(x, y_1) + \phi(x, y_2)$, pour tout $x, y_1, y_2 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$
2. ϕ est linéiare à droite :
   $\phi(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha\phi(x_1, y) + \phi(x_2, y)$, pour tout $y, x_1, x_2 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$

Soit ϕ : $E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire.
$(*)$ ϕ est dite **symétrique** si $\phi(x,y) = \phi(y,x)$ pour tout $x, y \in E$.
$(*)$ ϕ est dite **antisymétrique** si $\phi(x,y) = -\phi(y,x)$ pour tout $x, y \in E$.
$(*)$ ϕ est dite **alternée** si $\phi(x,x) = 0$ pour tout $x \in E$.

Notation.

$(*)$ $\mathfrak{L}_2(E) = \mathfrak{L}(E,E,\mathbb{K})$ = l'ensemble des formes bilinéaires sur E.
C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$(*)$ $S_2(E)$ = l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E.
$(*)$ $A_2(E)$ = l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques sur E.

D'après la Proposition 1.4 on a :

Proposition 2.2.

Soit ϕ une forme bilinéaire.
ϕ est alternée $\iff$ ϕ est antisymétrique.

Remarque 2.3.

Soit ϕ une forme bilinéaire sur E, alors

$(*)$ l'application ϕ_s définie par : $\phi_s(x,y) := \frac{\phi(x,y)+\phi(y,x)}{2}$, est **une forme bilinéaire symétrique**.

$(*)$ l'application ϕ_a définie par : $\phi_a(x,y) := \frac{\phi(x,y)-\phi(y,x)}{2}$, est **une forme bilinéaire antisymétrique.**

Et on a $\phi = \phi_s + \phi_a$.

Proposition 2.4.

Toute forme bilinéaire sur E s'écrit de manière unique comme la somme d'une forme bilinéaire **symétrique** et d'une forme bilinéaire **antisymétrique**.

Preuve :

Exemples 2.5

(1) $E = \mathbb{K}$, la multiplication : $m : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, telle que $m(x, y) = xy$, est forme bilinéaire symétrique (f.b.s).

Exemples 2.5

(2) $E = \mathbb{K}^n$, l'application : $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$, telle que $\phi(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$, est forme bilinéaire symétrique (f.b.s).
(où $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$).

Exemples 2.5

(3) $E = \mathbb{R}^2$, le produit scalaire usuel $(X, Y) \longrightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2$, est forme bilinéaire symétrique (f.b.s).
(où $X = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$).

Exemple 2.5

(4) $E = \mathfrak{C}([-1,1],\mathbb{R})$: l'espace des fonctions continues de $[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.
L'application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$\forall (f,g) \in E \times E, \quad \varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ est une f.b.s.

Exemple 2.5

(5) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: l'espace des matrices carrées d'ordre n.
L'application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$\forall (A,B) \in E \times E, \quad \varphi(A,B) = Tr({}^tA.B)$ est bien une f.b.s.

Rappel : $Tr(A) = \sum_{i+1}^{n} a_{ii}$ où $A = (a_{ii})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
et on a $Tr(AB) = Tr(BA)$.

2.2. Forme bilinéaire non dégénérée (régulière).

E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

définition 2.6

Une forme bilinéaire symétrique ϕ sur E est dite :

1. **non dégénérée** (ou régulière) si, $(\phi(x, y) = 0$ pour tout $y \in E)$ implique $x = 0$.
2. **positive** si, $\phi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.
3. **définie** si, $\phi(x, x) = 0 \implies x = 0$.
4. **définie positive** si, $\phi(x, x) > 0$ pour tout $x \in E \backslash \{0\}$.

Remarque : Un produit scalaire sur E est une f.b.s définie positive.

Remarque

Le noyau d'une une forme bilinéaire symétrique ϕ sur E est défini par : $\ker(\phi) = \{x \in E / \phi(x, y) = 0 \quad pour \quad tout \quad y \in E\}$.
ϕ est **non dégénérée** $\iff \ker(\phi) = \{0\}$.

Remarque 2.7

On peut également parler de non dégénérescence pour une forme bilinéaire antisymétrique.
Par contre, la notion de définie positive est sans intérêt dans ce cas, car si ϕ est antisymétrique alors $\phi(x, x) = 0$ pour tout $x \in E$.

Proposition 2.8

Soit ϕ forme bilinéaire symétrique sur E.
ϕ est définie positive $\Longrightarrow$ ϕ est non dégénérée.

Preuve :
Soit ϕ forme bilinéaire symétrique sur E définie positive.
Supposons, par l'absurde, que ϕ est dégénérée,
donc $\exists x \in E$, non nul, tel que $\phi(x, y) = 0$ pour tout $y \in E$.
en particulier, pour $y = x$ on obtient $\phi(x, x) = 0$
ce qui est contraire à l'hypothèse.

2.3. Orthogonalité pour les f.b.s.

Définition 2.9 :

Soit ϕ forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E. ET soient $x, y \in E$.

1. On dit que x et y sont **orthogonaux** relativement à ϕ si $\phi(x, y) = 0$.
   on note $x \perp_\phi y$ (ou simplement $x \perp y$ s'il n'y a pas d'ambiguïté).

$$x \perp_\phi y \iff \phi(x, y) = 0.$$

2. Un vecteur x est dit **isotrope** si, $\phi(x, x) = 0$, c.à.d x est orthogonal à lui même.
   L'ensemble des vecteurs isotropes est appelé : **le cône isotrope** de ϕ, il est noté $C_0(\phi)$**.**

$$C_0(\phi) = \{x \in E / \phi(x, x) = 0\}.$$

3. Un sous espace vectoriel F, de E, est dit **isotrope** s'il existe $x \in F$ $(x \neq 0)$ orthogonal à F tout entier.

Exemple 2.10 :

$E = \mathbb{R}^3$, On considère l'application $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\phi(X, Y) = xx' + yy' - zz'$ pour tout $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$ de E.

$(*)$ ϕ est bien une forme bilinéaire symétrique.

$(*)$ Déterminer $C_0(\phi)$, le cône isotrope de ϕ.

Question : Est ce que $C_0(\phi)$ est un sous espace vectoriel de E.

Remarque.

(1) Le cône isotrope de ϕ n'est pas, en général, sous espace vectoriel de E.

(2) Le noyau d'une f.b.s ϕ est $\ker \phi = \{x \in E / \forall y \in E \quad x \perp_\phi y\}$.

Définition 2.11 :

Soit F un sous espace vectoriel de E et ϕ une f.b.s sur E.
On appelle orthogonal de F, noté $F^{\perp}$, l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F.

$$\begin{aligned} F^{\perp} &= \{x \in E / \forall y \in F : \phi(x,y) = 0\} \\ &= \{x \in E / \forall y \in F : \quad x \perp_{\phi} y\} \end{aligned}$$

$(*)$ $F^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de E.
$(*)$ En général, $F \cap F^{\perp}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
En effet : Si F est isotrope c-à-d il contient un vecteur non nul x orthogonal à F tout entier.
Donc $x \in F^{\perp}$.
$(*)$ On dit que F est totalement isotrope si $F \subset C_0(\phi)$.

Exemple 2.12

$E = \mathbb{R}^3$, on considère ϕ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$
Pour tout $X = (x, y, z)$ et $Y = (x', y', z')$: $\phi(X, Y) = xx' + yy' + zz'$.
L'orthogonal d'une droite D est bien le plan vectoriel orthogonal.

Proposition 2.13

Soit ϕ une f.b.s non dégénérée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n.
Pour tout sous espace vectoriel F de E on a :

$$dim(F) + dim(F^{\perp}) = dimE = n$$

De plus

$$(F^{\perp})^{\perp} = F.$$

La preuve est basée sur le lemme suivant :

Lemme 2.14

Soit Soient $B = \{e_1, ..., e_1\}$ une base de E et ϕ une f.b.s non dégénérée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Alors la matrice $M = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où $a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$ pour tout $i, j = 1...n$, est inversible.

Preuve du lemme :
Rappel :

$$\begin{aligned} M \quad est \quad inversible \quad &\Longleftrightarrow \quad U_M \quad est \quad inversible, \\ &\Longleftrightarrow \quad \ker(U_M) = \{0\} \\ &\Longleftrightarrow \quad (MX = 0 \quad \Longrightarrow \quad X = 0). \end{aligned}$$

Soit, donc, $X = (x_1, ..., x_1)$ tel que $MX = 0$.
Donc $\sum_{j=1}^{n} \phi(e_i, e_j)x_j = 0$ pour tout $i = 1....n$
$\Longrightarrow$ $\sum_{j=1}^{n} \phi(e_i, e_j x_j) = 0$ pour tout $i = 1....n$
$\Longrightarrow$ $\phi(e_i, X) = \phi(e_i, \sum_{j=1}^{n} e_j x_j) = 0$ pour tout $i = 1....n$
$\Longrightarrow$ $\forall Y \in E : \phi(X, Y) = 0$.
Comme ϕ est non dégénérée, alors $X = 0$,
ce qui montre que la matrice M est inversible.

Preuve de la Proposition :

Question : Est ce que La restriction d'une f.b.s non dégénérée, à un sous espace vectoriel, est aussi non dégénérée ?

Exemple 2.15

$E = \mathbb{K}^2$, on considère $\phi : E \longrightarrow E$ telle que : $\phi(X, Y) = xx' - yy'$, où $X = (x, y)$ et $Y = (x', y')$.
$(-)$ ϕ est bien une f.b.s non dégénérée sur E.
$(-)$ On considère $F = \{(x, y) \in E / x = y\}$ (c'est la première bissectrice) c'est un sous espace vectoriel de E.
Soit $u = (x, y)$ et $v = (x', y') \in F$, donc $x = y$ et $x' = y'$.
On a $\phi(u, v) = xx' - yy' = 0$
ce qui montre que ϕ/F (la restriction de ϕ à F) est dégénérée.
Conclusion : La restriction d'une f.b.s non dégénérée n'est pas nécessairement non dégénérée.
D'où la définition suivante :

Définition 2.16

Soit ϕ une f.b.s non dégénérée sur un espace vectoriel E.
Un sous espace vectoriel F de E sur lequel la restriction de ϕ est non dégénérée est appelé : **sous espace non dégénéré.**

Proposition 2.17

Soit ϕ une f.b.s non dégénérée sur un espace vectoriel E, et F un sous espace vectoriel de E.
F est non dégénéré $\iff$ $E = F \oplus F^{\perp}$.
De plus, dans ce cas, $F^{\perp}$ est aussi non dégénéré

2.4 Bases orthogonales.

Définition 2.18

Soit ϕ une f.b.s sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Une base $B = \{e_1, ..., en\}$, de E, est dite orthogonale pour ϕ, si
$\phi(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i, j = 1...n$ tel que $i \neq j$

Théorème 2.19

Soit ϕ une f.b.s sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Il existe une base B de E formée de vecteurs 2 à 2 orthogonaux.

Preuve : C'est par récurrence sur $n = dim(E)$.

3. Matrice d'une forme bilinéaire.

3.1. Matrice d'une forme bilinéaire.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Et $B\{e_1, ..., e_n\}$ une base de E.
Si $u, v \in E$ alors $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$.
Soit ϕ une f.b sur E.On a alors :
$\phi(u, v) = \phi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i)$
$\phi(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \phi(e_i, e_j)$
On pose $\phi(e_i, e_j) = a_{ij}$.
Si ϕ est symétrique on aura : $\phi(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$
$\phi(u, v) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} a_{ij}(x_i y_j + x_j y_i)$

C'est l'écriture polynomiale de ϕ.
Cela montre que l'expression analytique de ϕ est entièrement déterminée dès que l'on connaît la valeur de $\phi(e_i, e_j)$

Définition 3.1

Soit ϕ une f.b sur E
La matrice de ϕ relativement à $B = \{e_1, ..., e_n\}$, une base de E, est la matrice :

$$M_B(\phi) := (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n},$$

où $a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$ pour tout $i, j = 1....n$.

Si X et Y sont les vecteurs colonnes formés des coordonnées de u et v, alors

$$\phi(u, v) = {}^t X.M.Y.$$

où ${}^t X$ est la transposée du vecteur conlonne X.

Proposition 3.2

Soit ϕ une f.b sur E
(1) ϕ est symétrique $\iff$ la matrice M est symétrique, $(M^t = M)$.
(2) ϕ est antisymétrique $\iff$ la matrice M est antisymétrique $(M^t = -M)$.
(3) ϕ est non dégénérée $\iff$ la matrice M est inversible.

Exemples 3.2

(1) Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
Pour tout $u = (x, y)$ et $v = (x', y') : \phi(u, v) = xx' + yy'$.
$B = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
$\phi(e_1, e_1) = 1$; $\phi(e_1, e_2) = 0$
$\phi(e_2, e_1) = 0$; $\phi(e_{21}, e_2) = 1$.
donc

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Remarque : si X et Y sont les vecteurs colonnes formés des coordonnées de u et v, alors

$$\phi(u, v) = X^t M_B(\phi) Y.$$

Exemples 3.2

(2) $E = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ sa base canonique.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
Pour tout $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$:
$\phi(u, v) = 2xx' + 7yy' + 3xy' - xz' + 3yx' - zx'$.
(a) Vérifier que f est une f.b sur E.
(b) Déterminer la matrice de f par rapport à la base B.
(c) L'application f est-elle symétrique.

Exemples 3.2

(3) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{1, X, X^2\}$ sa base canonique.
Soit $g : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
Pour tout $P, Q \in E$: $g(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)de$.
(a) Vérifier que f est une f.b.s sur E.
(b) Déterminer l'écriture polynomiale de g.
(c) Déterminer la matrice de f par rapport à la base B.

Remarque 3.3

La donnée de la matrice $M_B(\phi)$ de l'application ϕ relativement à une base B permet de retrouver l'écriture analytique de ϕ.
En effet Soient X et Y sont les vecteurs colonnes formés des coordonnées de u et v, alors

$$\phi(u, v) = X^t M_B(\phi) Y.$$

Exemple : La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

définie la f.b.s suivante :

3.2. changement de bases.

Rappel

Soient $B = \{e_1, ..., e_n\}$ et $B = \{e'_1, ..., e'_n\}$ deux bases de E.
La matrice de passage de B à B' est la matrice (inversible) P dont la j^{em} colonne est formée des coordonnées de e'_j dans la base B.
Pour un vecteur $u \in E$, si X (resp. X') est le vecteur colonne formé des coordonnées de u dans la base B (resp. B') alors :

$$X = PX'.$$

Pour un endomorphisme f de E. Si M (resp. M') la matrice de f dans la base B (resp. B') alors :

$$M' = P^{-1}MP.$$

3.2. changement de bases.

Proposition 3.4

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E : un espace vect de dimension n.
Soient $B = \{e_1, ..., e_n\}$ et $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ deux bases de E et P La matrice de passage de B à B'.
si $M_B(\phi)$ est la matrice de ϕ par rapport à la base B
alors la matrice de ϕ par rapport à la base B' est :

$$M_{B'}(\phi) = P^t M_B(\phi) P.$$

Où P^t désigne la transposée de P.

Preuve : 28 29

Remarque 3.5

Si A est une matrice carrée **symétrique** d'ordre n et P une matrice inversible
alors la matrice $A' = P^t AP$ est aussi **symétrique**.
On dit que A et A' sont **congruentes**.
La relation de congruence des matrices est une relation d'équivalence.

Exercice

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

(1) Écrire la f.b.s f associée à A.
(2) Vérifier que $B = \{u = (2,3), v = (1;1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
(3) Donner la matrice de ϕ par rapport à la nouvelle base B.

Exemples 3.6

On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :
$\phi(X, Y) = 3xx' - 5yy' - 2xy' - 2x'y + 3yz' + 3y'z$ pour tout $X = (x, y, z)$ et $Y = (x', y', z')$.
(1) Montrer que ϕ est une f.b.s.
(2) Donner la matrice de ϕ dans la base canonique.

Exercice

Écrire la forme bilinéaire symétrique associée à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

Proposition 3.7

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E : un espace vect de dimension n.
Si $B = \{e_1, ..., e_n\}$ et $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ sont deux bases de E, alors les matrices $M_B(\phi)$ et $M_{B'}(\phi)$ ont le même rang.

3.3. Bilinéarité et Dualité.

Soit E un espace vectoriel et E^* sont dual.
soit $b : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique.
Pour tout $x \in E$, l'application $b(., x) : E \to \mathbb{K}$ définie par $b(., x)(y) = b(y, x)$, est une forme linéaire sur E.
c.à.d $b(., x) \in E^*$.

Proposition 3.7

L'application $\varphi_b : E \to E^*$, définie par $\varphi_b(x) = b(., x)$, est une linéaire.
φ_b est appelée : application linéaire de E dans son dual associée à la forme bilinéaire symétrique b.
Si $dim(E) = n$, alors l'application φ_b est isomorphisme d'espaces vectoriels.
Et on a : pour toute forme linéaire $f \in E^*$ il existe un un unique vecteur $x \in E$ tel que : $f = b(., x)$
c.à.d $f(y) = b(x, y)$ pour tout $y \in E$.

4. Formes quadratiques

4.1. Forme quadratique attachée à une forme bilinéaire symétrique.

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E.

Définition 4.1

On appelle **forme quadratique associée** à la f.b.s ϕ, l'application $q_\phi : E \to \mathbb{K}$ définie par :

$$q_\phi(x) = q(x) = \phi(x, x) \text{ pour tout } x \in E$$

Proposition 4.2

Si q est une forme quadratique associée à une forme bilinéaire ϕ alors :

1. $(\forall x \in E)\ (\forall \lambda \in \mathbb{K}) : q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$.
2. $\forall x, y \in E : \quad \phi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$.
3. $\forall x, y \in E : \quad q(x + y) + q(x - y) = 2(q(x) + q(y))$.

(Formule du parallélogramme)

Ceci permet de donner une définition générale d'une forme quadratique

Définition 4.3

On appelle **forme quadratique** toute application $q : E \to \mathbb{K}$ telle que :

(1) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(2) L'application $\phi : E \times E \to \mathbb{C}$ définie par $\phi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$, pour tout $x, y \in E$, est une forme bilinéaire symétrique.

la forme bilinéaire symétrique ϕ est appelée **forme polaire** associée à q.

Remarque 4.5

Si on note :
$Q(E)$= l'ensemble des formes quadratiques sur E (c'est bien un espace vectoriel) et
$S_2(E)$= l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur E ;

Théorème 4.6

L'application $\psi : S_2(E) \to Q(E)$ telle que $\psi(\phi) = q_\phi$, est un isomorphisme.

Cette dualité montre l'équivalence entre les formes quadratiques et f.b.s.

4.2. Écriture matricielle.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Et $B = \{e_1, ..., e_n\}$ une base de E.
Si $x \in E$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$,
Soit ϕ une f.b.s sur E associée à la forme quadratique q, alors :

$$q(x) = \phi(x, x) = \phi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i)$$

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \phi(e_i, e_j)$$

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 \quad + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

C'est l'écriture polynomiale de q.
Cela montre que $q(x)$ est un polynôme homogène de second degré en $x_i x_j$ et x_i^2.

Proposition 4.7

(1) Si q une forme quadratique non nulle sur E, l'expression de q dans chaque base B de E est un polynôme homogène de degré 2 (en coordonnées de x).
(2) Si q est application de E dans $\mathbb{K}$ dont l'expression analytique dans une base B de E est un polynôme homogène de degré 2, alors q est une forme quadratique .

Définition 4.7

Soit q une forme quadratique sur E
La matrice M de la forme bilinéaire symétrique ϕ associée à q, relativement à une base$B$, est appelée **la matrice de** q **dans** b**.**
Et on a

$$q(x) = X^t M X$$

Où X vecteur colonne formés par les coordonnées de x dans la base B.

Remarque 4.8

Soient B et B' sont deux de l'espace vectoriel E et q une forme quadratique sur E
Si M est la matrice de q, relativement à la base B,
alors sa matrice relativement à la base B' est donnée par

$$M' = P^t M P$$

Où P est la matrice de passage de B à b'.

Exemple 4.9

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

Déterminer la forme quadratique associée.

Forme bilinéaire associée à une forme quadratique.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Et $B = \{e_1, ..., e_n\}$ une base de E.
Si $x \in E$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$,
Soit q une f.quadratique sur E, on a alors :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 \quad + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Pour retrouver la forme bilinéaire symétrique ϕ associée à q, on utilise la règle de dédoublement des termes suivantes :

$(*)$ on remplace les termes x_i^2 par $x_i y_i$

$(*)$ on remplace les termes $x_i x_j$ par $\frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$

On vérifie que, pour ϕ ainsi construit, on a bien
$\phi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$, pour tout $x, y \in E$.

Exemple 4.10.

(1) L'application $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x, y, z) = x^2 + 3z^2 + 4xy$ est une forme quadratique,
Sa forme polaire est $\phi = xx' + 3yy' + 2(xy' + x'y)$

Exemple 4.10.

(2) Soit L'application $q : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$ définie par
$q(P) = P(0) - 5P'(1) + 3P(1)P(2)$ est une forme quadratique,
Sa forme polaire est

$$\phi(P, Q) = P(0)Q(0) - 5P'(1)Q'(1) + \frac{3}{2}(P(1)Q(2) + P(2)Q(1)).$$

4.3 Forme quadratique et orthogonalité

Définitions 4.11 .

Soit q une forme quadratique définie sur un espace vectoriel de dimension finie E,
et soit ϕ_q sa forme polaire.
$(*)$ $x \perp_q y \iff \phi_q(x,y) = 0$
$(*)$ L'orthogonal d'un sous espace vectoriel F de E, est
$F^{\perp} = \{x \in E / \forall y \in F : x \perp_q y\}$.
$(*)$ Une base $B = \{e_1, ..., e_n\}$ est dite q-orthoganale si $\phi_q(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$.
$(*)$ Le noyau de q est le sous espace vectoriel de E donné par

$$\ker(q) = \ker(\phi_q) = \{x \in E / \forall y \in E : \phi_q(x,y) = 0\}.$$

$(*)$ Le rang de q est $rg(q) = rg(\phi_q) = rg(M_q)$
$(*)$ Un vecteur x est dit q-isotrope si $q(x) = 0$.
$(*)$ Le cône isotrope de q est donné par $C_q = \{x \in E / q(x) = 0\}$

4.3 Forme quadratique et orthogonalité

Remarque 4.12.

(1) Une base B est q-orthoganale $\Longleftrightarrow$ sa matrice M_q est diagonale.
(2) Soit M la matrice de q (ou de ϕ) par rapport à une base B.
Trouver une base orthogonale B' c'est trouver une matrice inversible P telle que $M' =^T PMP$ soit diagonale

4.3 Forme quadratique et orthogonalité

Exemple 4.13 .

Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $q(u) = x^2 - z^2$ une forme quadratique.
(1) Donner la f.b.s associée ainsi que la matrice de q.
(2) Vérifier que $e_1 \perp e_2$.
(3) Trouver les vecteurs q- orthogonaux à e_1, e_2 et e_3
(4) Déterminer le cône isotrope de q.

Exemple 4.13 .

Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $q(x, y) = x^2 - y^2$ une forme quadratique.
$(*)$ Déterminer le cône isotrope de q.

4.3 Forme quadratique et orthogonalité

Définition 4.14 (Forme quadratique positive).

Soit q une forme quadratique sur E.
(1) q est dite (régulière) **non dégénérée** si $\ker(q) = \ker(\phi_q) = \{0\}$.
(2) q est dite **dégénérée** si $\ker(q) \neq \{0\}$.
(3) q est dite **définie** si $\forall x \in E : x \neq 0 \implies q(x) \neq 0$
(4) q est dite **définie positive** si $\forall x \in E \ \{0\} : q(x) > 0$
(5) q est dite **positive** si $\forall x \in E : q(x) \geqslant 0$

Exercice :
Montrer que :
q est **définie** $\implies$ q est non dégénérée.

Théorème 4.15 (Th de Cauchy-Schwarz).

Soit q une forme quadratique positive sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie E, et ϕ sa forme polaire.
Pour tout $x, y \in E$ on a :

$$(\phi(x,y))^2 \leqslant q(x)q(y).$$

De plus, si q est définie,

$$(\phi(x,y))^2 = q(x)q(y) \iff x \quad et \quad y \quad sont \quad lies$$

Preuve : = Exercice

Théorème 4.16 (Th de Minkowski).

Soit q une forme quadratique positive sur E.
Alors, pour tout $x, y \in E$

$$\sqrt{q(x+y)} \leqslant \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}.$$

De plus, si q est définie, l'égalité n'est vérifiée que s'il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $y = \lambda x$ ou si $x = 0$.

Preuve : = Exercice

5. Décomposition en carrés d'une forme quadratique

5.1. Exemple et position du problème .

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique, telle que

$$q(x,y,z) = 4x^2 + 4xy - 4xz - 2y^2 - 14yz - 19z^2.$$

Cette expression n'est très agréable à manipuler.
Un calcul simple montre que

$$q(x,y,z) = (2x + y - z)^2 - 3(y + 2z)^2 - 8z^2.$$

Ce qui va être plus agréable à utiliser.
Soit B' une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle les nouvelles coordonnées (x', y', z') s'expriment en fonction des anciennes par :

$$\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = y + 2z \\ z' = z \end{cases}$$

5. Décomposition en carrés d'une forme quadratique

5.1. Exemple et position du problème .

Si on note P la matrice de passage de B à B' alors la matrice de passage de B' à B est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Par un calcul élémentaire on obtient :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Les vecteurs de la base B' sont donc : $u_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, $u_2 = (-\frac{1}{2}, 1, 0)$ et $u_3 = (\frac{3}{2}, 2, 0)$.
La forme quadratique s'exprime dans cette nouvelle base par

$$q(X) = x'^2 - 3y'^2 - 8z'^2.$$

Dans l'ancienne base, la matrice de q est

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -7 \\ -2 & -7 & -19 \end{pmatrix},$$

Dans la nouvelle base sa matrice devient :

$$M' = {}^t PMP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

Remarque : Dans la base B' l'écriture de q est plus simple, on dit que l'on a **réduit la forme quadratique en carrés.**

Définition 5.1

Réduire une forme quadratique q, sur un e.v E, c'est trouver une base B' de E sur laquelle elle s'écrit :

$$q(X) = \alpha_1(x_1')^2 + ... + \alpha_n(x_n')^2$$

où $\alpha_1, ...\alpha_1 \in \mathbb{R}$ et $x_1', ...x_n'$ désignant les coordonnées de X dans cette base.

5.2. Décomposition en carrés d'une forme quadratique : méthode de Gauss.

Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n, et $B = \{e_1, ..., e_n\}$ une base de E.
Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ on a :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 \quad + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \quad + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

Proposition 5.2

Il existe p formes linéaires $f_1, ..., f_p$ définies sur E linéairement indépendantes et p scalaires $\alpha_1, ..., \alpha_p$
tels que, pour tout $x \in E$,

$$q(x) = \sum^{p} \alpha_i (f_i(x))^2$$

Nous allons procéder par récurrence sur n en discutant deux cas :
Le résultat est évident pour $n = 1$.
Supposons que toute forme quadratique de $n-1$ variables s'écrit comme la somme de carrés de p formes linéaire linéairement indépendantes., $(p \leqslant n-1)$
1^{er} **cas :**$q(x)$ contient un carré par exemple x_1^2 (c.à.d il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $a_{ii} \neq 0$).
On isole tous les termes contenant cette coordonnée x_1, on obtient :

$$q(x) = a_1 x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_1 x_j + \sum_{i=2}^{n} a_i x_i^2 + 2 \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

$$q(x) = a_1 (x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_1} x_1 x_j) + \sum_{i=2}^{n} a_i x_i^2 + 2 \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

$$q(x) = a_1 (x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_1} x_j)^2 + \sum_{i=2}^{n} a_i x_i^2 + 2 \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} x_i x_j - (\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_1} x_j)^2$$

$$q(x) = a_1(x_1 \quad + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_1} x_j)^2 \quad + S(x_2, ..., x_n)$$

où

$$S(x_2, ..., x_n) = \sum_{i=2}^{n} a_i x_i^2 \quad + 2 \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j \quad - (\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_1} x_j)^2$$

c'est une forme quadratique en $x_2, ..., x_n$. (avec une variable de moins).
D'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$S(x) = \alpha_2 (f_2(x))^2 + ... + \alpha_p (f_p(x))^2.$$

où $f_2(x), ...f_p$ sont des formes linéaires linéairement indépendantes.
Ce qui montre que q est somme de $p+1$ formes linéaires, c.à ;d

$$q(x) = \alpha_1 (f_1(x))^2 + \alpha_2 (f_2(x))^2 + ... + \alpha_n (f_n(x))^2.$$

avec $\alpha_1 f_1(x) = a_1(x_1 \quad + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_1} x_j)$.

Les formes linéaires $f_1, f_2, ..., f_p$ sont linéairement indépendantes car :$f_2, ..., f_p$ sont linéairement indépendantes (par hypothèse) et que f_1 est indépendante des $p-1$ autres qui ne contiennent pas x_1.
2^{eme} **cas :**$q(x)$ ne contient que des termes rectangles c.à.d

$$q(x) = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

On peut choisir, par exemple, $x_1 x_2$
On isole tous les termes contenant x_1 et x_2 , on obtient :

$$q(x) = 2(a_{12}x_1x_2 + (\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j)x_1 + (\sum_{j=2}^{n} a_{2j}x_j)x_2 + \sum_{3 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}x_ix_j$$

$$q(x) = 2a_{12}(x_1x_2 + Bx_1 + Cx_2) + D$$

où B, C *et* D ne contiennent que les $n-2$ variables $x_3, ...x_n$

et on écrit

$$x_1x_2 + Bx_1 + Cx_2 = (x_1 + C)(x_2 + B) - BC$$

Identité de Babilone

$$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$$
$$ab = \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2$$

Donc

$$q(x) = 2a_{12}(x_1x_2 \quad + Bx_1 \quad + Cx_2) + D$$

$$q(x) = 2a_{12}(\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + B + C)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + B - C)^2) - BC + D$$

$$q(x) = a_{12}\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + B + C)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + B - C)^2 + S$$

où S est une forme quadratique en $x_3, ...x_n$.
On achève la décomposition en appliquant l'hypothèse de récurrence à S.
Conclusion :

Théorème 5.3

Soit q une forme quadratique sur E Il existe une famille libre $\{f_1, ...f_p\}$ de formes linéaires sur E telle que
$q = a_1 f_1^2 + ... + a_p f_p^2 \qquad (p \leqslant n) \qquad$ et $\quad p = rg(M_B(q))$.

Preuve :
Le procédé de Gauss montre l'existence d'une famille libre $\{f_1, ...f_p\}$ dans E^* telle que :

$$q = a_1 f_1^2 + ... + a_p f_p^2 \qquad avec \qquad a_1, ... + a_p \in \mathbb{K}.$$

Soit ϕ la forme polaire associée à q, et complétons la famille libre $\{f_1, ...f_p\}$ en une base $\{f_1, ...f_p, f_{p+1}...f_n\}$ de E^*.
Considérons la base $B = \{e_1, ...e_p, e_{p+1}...e_n\}$ de E dont la base duale est $\{f_1, ...f_p, f_{p+1}...f_n\}$.
Pour tout $i \in \{1...n\}$ $\phi(e_i, e_i) = a_i$.
Si $i \neq j$ on a $\phi(e_i, e_i) = 0$.
Donc $B = \{e_1, ...e_p, e_{p+1}...e_n\}$ est une base orthogonale pour ϕ

la matrice de ϕ bans cette base s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & \dots & .. & 0 \\ . & .. & .. & & .. & 0 \\ 0 & .. & a_p & .. & .. & 0 \\ . & .. & .. & & .. & 0 \\ 0 & .. & .. & .. & .. & 0 \end{pmatrix},$$

enfin on a : $rg(q) = rg(M) = p$

Exemple 5.4

Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x, y, z) = 4x^2 - 2y^2 - 19z^2 + 4xy + 4xz - 14yz.$$

Exemple 5.5

Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^4$ par :

$$q(x, y, z) = xy + yz + zt + tx.$$

5.3. Construire une base orthogonale-Diagonalisation.

Théorème 5.6

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique associée à une forme quadratique q sur un e.v E de dimension finie n.
Alors il existe une base B de E ϕ-orthogonale.

D'après le théorème précédent, il existe une famille libre $\{f_1, ...f_p\}$ dans E^* telle que :

$$q = a_1 f_1^2 + ... + a_p f_p^2 \qquad avec \qquad a_1, ... + a_p \in \mathbb{K}.$$

Complétons cette famille libre en une base $\{f_1, ...f_p, f_{p+1}...f_n\}$ de E^*.
Considérons la base $B = \{e_1, ...e_p, e_{p+1}...e_n\}$ de E dont la base duale est $\{f_1, ...f_p, f_{p+1}...f_n\}$.
Pour tout $i \in \{1...n\}$ $\phi(e_i, e_i) = a_i$.
Si $i \neq j$ on a $\phi(e_i, e_i) = 0$.
Donc $B = \{e_1, ...e_p, e_{p+1}...e_n\}$ est une base orthogonale pour ϕ.

La matrice de ϕ dans cette base est

$$M = \begin{pmatrix} \phi(e_1, e_1) & 0 & \dots & \dots & .. & 0 \\ . & .. & .. & & .. & 0 \\ 0 & .. & \phi(e_p, e_p) & .. & .. & 0 \\ . & .. & .. & & .. & 0 \\ 0 & .. & .. & .. & .. & \phi(e_n, e_n) \end{pmatrix},$$

Corollaire 5.7

Soit M une matrice symétrique.
Il existe une matrice inversible P telle que $M' = {}^t PMP$ est diagonalisable.

6. Signature d'une forme quadratique réelle

6.1. Théorème d'inertie de Sylvestre.

Théorème 6.1

Soit q une forme quadratique sur E et soit ϕ sa forme polaire.
Si on considère une base B orthogonale pour ϕ,
la matrice de q est diagonale et admet p éléments diagonaux positifs et s éléments diagonaux négatifs.
Alors pour toute base orthogonale pour ϕ, la matrice diagonale de q a aussi p éléments diagonaux positifs et s éléments diagonaux négatifs.
c.à.d le couple (p, s) est indépendant du choix de la base q-orthogonale.

6.1. Théorème d'inertie de Sylvestre.

Soit

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ 0 & .. & 0 \\ 0 & & a_n \end{pmatrix},$$

Soit p : le nombre des indices des i tels que $a_i > 0$,
Soit s : le nombre des indices des i tels que $a_i < 0$,
et $r = rg(q)$ le rang de q.
Le couple (p, s) est appelé : **la signature de la forme quadratique** q, et on note $sg(q)$.
et on a $sg(q) = (p, s) = (p, r - p)$ et $rg(q) = r = p + s$.
Remarque : Si $B = \{e_1, ...e_n\}$ est une base q-orthogonale, alors :
p : le nombre des indices des indices i tels que $q(e_i) > 0$,
et s : le nombre des indices des indices i tels que $q(e_i) < 0$,

Exemple

$(*)$ Pour l'exemple 5.4 la signature est $sg(q) = (1, 2)$
$(*)$ Pour l'exemple 5.5 la signature est $sg(q) = (2, 0)$

6.2. Classification des formes quadratiques réelles.

Etant donnée une forme quadratique q sur un espace vectoriel réel E de dimension n.
Pour $x = (x_1, ...x_n)$ on a :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 \quad + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

Donc donc on peut considérer q comme une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. dans la base donnée.

Définition 6.2

Deux formes quadratiques q_1 et q_2 sur $\mathbb{R}^n$ sont dites **équivalentes**, s'il existe un isomorphisme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que

$$q_2(u) = q_1(f(u)) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^n.$$

et on note $q_1 \sim q_2$.

c.à.d que le diagramme suivant est commutatif.

6.2. Classification des formes quadratiques réelles.

Remarque 6.3

Si on note ϕ_i la forme polaire de q_i $i = 1, 2$, alors
$q_1 \sim q_2 \iff \forall u, v \in E$ on a $\phi_2(u, v) = \phi_1(f(u), f(v))$

En effet :

6.2. Classification des formes quadratiques réelles.

Théorème 6.4

Deux formes quadratiques réelles q_1 et q_2 sont équivalentes si, et seulement si elles ont la même signature.

Corollaire 6.5

Deux matrices symétriques réelles sont congruentes si, et seulement si elles ont la même signature.

Proposition 6.6

Soit q une forme quadratique réelle. de signature $sg(q) = (p, s)$.
$(*)$ $sg(q) = (p, 0) \implies q$ est définie positive.
$(*)$ $sg(q) = (0, s) \implies q$ est définie négative.
$(*)$ $sg(q) = (p, s)$ et $p > 0$ et $s > 0 \implies q$ n'est définie positive ni négative.
$(*)$ $sg(q) = (p, s)$ et $n = p + s \implies q$ est non dégénérée.

Exemple 6.7

Soit q une forme quadratique réelle telle que

$$q(x, y, z) = x^2 + (1 + \alpha)y^2 + (\alpha^2 + \alpha + 1)z^2 + 2xy - 2\alpha yz.$$

(1) Décomposer en carrés la forme quadratique q.
(2) Déterminer selon les valeurs de α le rang et la signature de q.

Exercice

Soit q une forme quadratique réelle définie.
Montrer que q est soit définie positive ou soit définie négative.

6.3. Classification des formes quadratiques complexes.

Théorème 6.8

Soit q une forme quadratique de rang $rg(q) = r$, sur un $\mathbb{C}$- espace vectoriel E de dimension finie n.
Alors q peut s'écrire sous la forme :

$$q = f_1^2 + ... + f_r^2$$

où $f_1, ..., f_r$ sont des formes linéaires sur E linéairement indépendantes.
Et il existe une base de E dans laquelle la matrice de q est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & ... & .. & 0 \\ . & .. & .. & & .. & 0 \\ 0 & .. & 1 & 0 & .. & 0 \\ . & .. & .. & & .. & 0 \\ 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 \end{pmatrix},$$

Corollaire 6.9

Deux formes quadratiques complexes sur un espace vectoriel complexe sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang

7. Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

7.1. Espace euclidien.

Définition 7.1

On appelle **produit scalaire** sur E une forme bilinéaire symétrique ϕ telle que la forme quadratique associée q_ϕ soit **définie positive.**
On appelle **espace euclidien** un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.
On notera (E, ϕ) cet espace euclidien.

Proposition 7.2

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique associée à une forme quadratique q sur E.
ϕ est un **produit scalaire** sur E si, et seulement si il existe une base de E orthogonale pour q dans laquelle la matrice de q est la matrice identité.

Corollaire 7.3

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique associée à une forme quadratique q sur E.
ϕ est un **produit scalaire** sur $E \iff sg(q) = (n, 0)$.

Proposition 7.4

Soit (E, ϕ) un espace euclidien.
L'application $x \mapsto \sqrt{\phi(x, x)}$ est une norme sur E dite norme euclidienne.
On notera $\| x \| = \sqrt{\phi(x, x)}$.

(1) $\| x \| = 0 \implies x = 0pm$
(2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$ on a $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$
(3) $\forall x, y \in E : \| x + y \| \leqslant \| x \| + \| x \|$.

Proposition 7.5

Soit (E, ϕ) un espace euclidien de dimension finie.
L'application $x \mapsto \phi_x$ de $E \to E^*$, telle que $\phi_x(y) = \phi(x, y)$ pour tout $y \in E$, est isomorphisme (appelé isomorphisme canonique)

On déduit de ce théorème :
$(\forall f \in E^*) \quad (\exists! x \in E) \quad (\forall y \in E) : \quad f(y) = \phi(x, y).$

7.2. Orthogonalité.

Soit A une partie de l'espace euclidien (E, ϕ).
$A^{\perp} = \{x \in E / \phi(x, a) = 0 \quad pour \quad tout \quad a \in A\}$.
(1) $A^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de E.
(2) On peut identifier $A^{\perp}$ à $\{f \in E^* / \forall a \in A \quad f(x) = 0\}$.

Proposition 7.6

Soit F un sous espace vectoriel de E,
on a :

$$F \oplus F^{\perp} = E.$$

Remarque : On peut également définir l'orthogonal d'un sous-espace F d'un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire, mais dans ce cas F et $F^{\perp}$ ne sont pas nécessairement supplémentaires (ils peuvent avoir un vecteur non nul en commun).

Théorème 7.6 (Pythagore)

Soit $x, y \in E$.

$$x \perp y \iff \| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2.$$

Proposition 7.7

Il existe dans E des bases formées de vecteurs 2 à 2 orthogonaux. Plus généralement, tout système de vecteurs non nuls formé de vecteurs 2 à 2 orthogonaux est libre.

7.2. Orthogonalité.

Une base $B = \{e_1, ...e_n\}$ est orthonormée si elle est formée de vecteurs 2 à 2 orthogonaux et de norme 1,
c.à.d $e_i \perp e_j$ si $i \neq j$ et $\| e_i \| = 1$ pour tout $i = 1....n$.

Théorème 7.8 (Gram-Schmidt)

Soient (E, ϕ) un espace euclidien de dimension n et $B = \{u_1, ...u_n\}$ une base de E.
Il existe une et une seule base orthonormée $\{e_1, ...e_n\}$ de E telle que $Vect(e_1, ...e_n) = Vect(u_1, ...u_n)$ et $\phi(e_i, u_i) > 0$ pour tout $i = 1...n$.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION